ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d'ADMISSION 1984

EPREUVE ECRITE OBLIGATOIRE d'ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

(Coefficient : 3)

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants.

Les candidats originaires des "classes T.A." n'ont pas à traiter les questions précédées d'un astérisque (*).

PREMIER EXERCICE

Soit $\mathcal{C}^2$ l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois continûment dérivables sur $[0 , 1]$ et soit α un nombre réel.

On pose : $\mathcal{E} = \{ f \in \mathcal{C}^2 \ ; \ f(0) = f(1) = 0 \}$,

$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{C}^2 \ ; \ f(0) = 0 , f(1) = \alpha \}$.

1°/ a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
Vérifier que la fonction k définie par :

$\forall t \in [0 , 1] , \ k(t) = \sin^3 \pi t$

appartient à $\mathcal{E}$.
Représenter graphiquement k .

b) Donner un exemple de fonction appartenant à $\mathcal{A}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un espace affine de direction $\mathcal{E}$.

2°/ a) Soient x_0 appartenant à $]0 , 1[$ et β un réel strictement positif tels que : $0 < x_0 - \beta < x_0 + \beta < 1$.
Expliciter une fonction f de $\mathcal{E}$ telle que :

- $\forall x \in [0 , 1] , \ f(x) \geq 0$
- $\forall x \in [0 , x_0 - \beta] \cup [x_0 + \beta , 1] , \ f(x) = 0$
- $\forall x \in [x_0 - \frac{\beta}{2} , x_0 + \frac{\beta}{2}] , \ f(x) \geq 1$.

b) Soit h une fonction continue sur $[0 , 1]$. Montrer que :

$$\left(\forall f \in \mathcal{E} , \int_0^1 f(t) h(t) \, dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [0 , 1] , h(t) = 0 \right) .$$

./.

3°/ On définit l'application T sur $\mathcal{C}^2$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2 , \ T(f) = \int_0^1 \left| f^2(t) + f'^2(t) \right| \, dt ,$$

f' désignant la fonction dérivée de f .
Montrer l'équivalence : $T(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
T est-elle injective ?

4°/ Dans cette question, on se fixe f appartenant à $\mathcal{E}$ et g appartenant à $\mathcal{A}$.
On pose : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} , \ R(\varepsilon) = T(g + \varepsilon f)$.

a) Montrer que la fonction R admet un minimum en 0 si et seulement si

$$\int_0^1 \left| g(t) f(t) + g'(t) f'(t) \right| \, dt = 0 .$$

b) Montrer que la condition précédente est équivalente à :

$$\int_0^1 \left| g(t) - g''(t) \right| f(t) \, dt = 0 .$$

✱ 5°/ On se propose de montrer qu'il existe une fonction et une seule g_0 appartenant à $\mathcal{A}$ et réalisant un minimum strict absolu pour T , c'est-à-dire :

$$\left(g \in \mathcal{A} \text{ et } g \neq g_0 \right) \Rightarrow \left(T(g) > T(g_0) \right) .$$

a) Déduire des questions précédentes qu'une telle fonction vérifie nécessairement une équation différentielle linéaire du second ordre.
Expliciter la seule fonction g_0 qui puisse convenir.

b) Calculer $T(g_0)$.

c) Montrer que : $\forall g \in \mathcal{A} , \ T(g) - T(g_0) = T(g - g_0)$.

d) En déduire que la fonction g_0 trouvée au 5°/ a) est bien solution du problème.

6°/ L'application T admet-elle un maximum sur $\mathcal{A}$?

./.

DEUXIEME EXERCICE

On considère $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier positif, on appelle $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Dans l'exercice, on notera de la même façon un polynôme et la fonction polynôme associée.

E étant un espace vectoriel, on appelle dual de E et on note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires définies sur E. Si E est de dimension finie, E et E^* ont même dimension.

Soit r un réel strictement positif ; on définit trois applications de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X] \quad , \quad \Phi_0(P) = P(0) \quad , \quad \Phi_1(P) = P(r) \quad , \quad \Phi_2(P) = P(-r) \ .$$

Soient $\widetilde{\Phi}_0$, $\widetilde{\Phi}_1$, $\widetilde{\Phi}_2$ les restrictions de Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 à $\mathbb{R}_2[X]$.

1°/ Montrer que $\mathcal{F} = (\widetilde{\Phi}_0 , \widetilde{\Phi}_1 , \widetilde{\Phi}_2)$ est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

2°/ Déterminer la base $\mathcal{B} = (P_0 , P_1 , P_2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dont $\mathcal{F}$ est la base duale, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (i , j) \in \{0 , 1 , 2\}^2 \ , \ \widetilde{\Phi}_i(P_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \widetilde{\Phi}_i(P_i) = 1 \ .$$

3°/ Soit $(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{0 , 1 , 2\} \quad , \quad \widetilde{\Phi}_i(P) = \alpha_i \ .$$

4°/ On définit sur $\mathbb{R}[X]$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$\forall (P , Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \ , \ \{P \ \mathcal{S} \ Q\} \Leftrightarrow \{(P - Q) \text{ est divisible par } X(X^2 - r^2)\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

I P 196 I

b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique élément de $\mathbb{R}_2[X]$, noté $\mu(P)$, tel que $P \ \mathcal{S} \ \mu(P)$.
Exprimer $\mu(P)$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0 , P_1 , P_2)$.

c) On définit l'application f par :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto \mu(X P)$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
f est-elle bijective ?

✱ 5°/ On définit l'application φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X] \quad , \quad \varphi(P) = \int_{-1}^{+1} P(t) \, dt \ .$$

a) Vérifier que φ appartient à $(\mathbb{R}_5[X])^*$.

b) Calculer la valeur du réel positif r pour laquelle la famille $(\varphi , \Phi_0 , \Phi_1 , \Phi_2)$ est liée.

c) Calculer alors les coefficients λ_i intervenant dans la relation :

$$\varphi = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \ \Phi_i \ .$$

TROISIEME EXERCICE

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2 - 1) \operatorname{Arctg} \frac{1}{2x - 1}$$

et on appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°/ a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

b) Exprimer, sur $\mathcal{D}$ privé de $\{0\}$, la dérivée de f sous la forme :
$f'(x) = 2x\, g(x)$.

c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$
et en déduire le tableau des variations de g.

d) Dresser le tableau des variations de f.

2°/ a) Donner un développement limité généralisé de f au voisinage de l'infini permettant de déterminer une asymptote à $\mathcal{C}$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.

b) Donner les développements limités de f, à l'ordre 2, au voisinage à droite et au voisinage à gauche de $\frac{1}{2}$.

3°/ Représenter graphiquement f.
On ne demande pas de déterminer les points d'inflexion, ni de préciser numériquement la position des extrema éventuels.

4°/ Montrer que : $\forall x \in [-1, 0]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$.

./.

5°/ On définit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{\pi} f(u_n) . \end{cases}$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 0]$.

b) Prouver que les suites extraites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant k\, |u_{n+1} - u_n|$, où k est une constante à préciser.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

e) Calculer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à 5.10^{-3} près.